

Grado de Física. Computación I. Curso 2017-18

Control 3 (04-05-2018; 10:00 a 14:00).

Modelo Z

Instrucciones:

Envía las soluciones de este examen al correo electrónico de tu profesor en la asignatura utilizando tu correo institucional de la UAM (*nombre@estudiante.uam.es*).

El 'asunto' del correo será: 'Computación I, Control 3: Subgrupo GGGG'. (GGGG es tu subgrupo.)

Comprueba que envías en el correo electrónico todas las soluciones del control y todos los programas necesarios para poder ejecutarlos.

Una vez enviado el correo, informa a tu profesor y espera a que este compruebe que lo ha recibido correctamente antes de abandonar el aula.

Las calificaciones de cada subgrupo serán publicadas en su página web de la asignatura.

Recuerda que todos los gráficos deben mostrar e identificar claramente en los ejes las magnitudes que representan y las unidades utilizadas.

El control se valorará sobre 10 puntos. La nota obtenida será el 30% de la asignatura.

Ejercicio 1. En este ejercicio se calculará cómo la atmósfera afecta a la trayectoria de un satélite artificial de masa m_s que se desvía de su órbita inicial y termina cayendo a la Tierra. Supondremos que la Tierra es una esfera homogénea de radio $R_T = 6371$ km y masa $M_T = 5.972 \cdot 10^{24}$ kg, y que la atmósfera se extiende hasta una altura $h = 600$ km sobre la superficie (véase la *Figura 1*). A su vez, consideraremos que el centro de la Tierra es el origen de un sistema de referencia inercial, siendo el eje OY el de rotación de la Tierra. Mientras no se indique lo contrario, los valores de todas las magnitudes se darán en este sistema de referencia inercial.

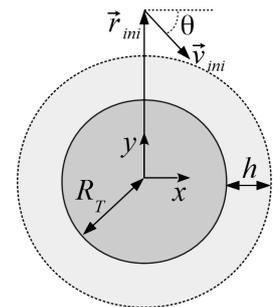


Figura 1

A las 10:00 horas del día de hoy un satélite artificial está a una altura $d_0 = 0.2 R_T$ sobre el Polo Norte, esto es, en el punto $\vec{r}_{ini} = (0, 1.2 R_T, 0)$. En ese instante, un trozo de basura espacial impacta contra el satélite de manera que, justo tras el choque, su velocidad es $\vec{v}_{ini} = v_0 (\cos \theta, \sin \theta, 0)$.

El satélite, además de la fuerza de atracción gravitatoria $\vec{F}_{grav}(\vec{r}) = -\frac{G_N M_T m_s}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$ dependiente de su posición \vec{r} (con $G_N = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$), experimenta, si está dentro de la atmósfera, una fuerza de rozamiento $\vec{F}_{roz}(\vec{r}, \vec{v}) = -\mu(\vec{r}) \vec{v}$, donde $\mu(\vec{r}) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|\vec{r}| - R_T}{h}\right) \mu_r & \text{si } |\vec{r}| \leq R_T + h \\ 0 & \text{si } |\vec{r}| > R_T + h \end{cases}$.

La ecuación del movimiento que hay que integrar es, entonces, $m_s \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{roz}$.

Realizar un script de nombre "Control3_1.m" usando $m_s = 500$ kg, $\mu_r = 0.15$ kg/s ; $v_0 = 9045.5$ m/s y $\theta = -\pi/10$ rad que:

1.A. Usando un paso de tiempo $\Delta t = 1$ s, integre la ecuación del movimiento hasta que el satélite choque con la Tierra o pasen 10^5 segundos desde el instante inicial. **(1.50 puntos)**

1.B. Dibuje en un mismo gráfico la Tierra como una circunferencia con línea continua, el límite de la atmósfera con una circunferencia de línea discontinua, y la trayectoria del satélite como una línea continua de un color diferente al utilizado para la Tierra. **(0.50 puntos)**

1.C. Obtenga y muestre en la ventana de comandos: **i)** la hora de impacto contra la Tierra con una precisión de 1 s; **ii)** la latitud del punto de impacto (en grados sexagesimales). **(0.75 puntos)**

1.D. Calcule y muestre en la ventana de comandos el trabajo efectuado por la fuerza de rozamiento a lo largo de todo el recorrido del satélite, esto es, la integral

$$W_{roz} = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \vec{F}_{roz} \cdot \vec{v} dt = - \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \mu(\vec{r}) |\vec{v}|^2 dt ,$$

donde t_{ini} es el instante inicial y t_{fin} el instante final. A su vez, calcule y muestre la cantidad $\Delta E = [T(t_{fin}) + U_{grav}(t_{fin})] - [T(t_{ini}) + U_{grav}(t_{ini})]$, siendo T la energía cinética del satélite y U_{grav} su energía potencial gravitatoria. **(0.75 puntos)**

Ejercicio 2. En la *Figura 2* se muestra la posición vertical de 3 muelles helicoidales sujetos entre dos soportes. Los resortes sujetan dos masas que están sometidas a la fuerza de la gravedad. Se considera que los muelles tienen masa nula y que las masas son puntuales.

La constante elástica de los muelles varía con la temperatura de acuerdo a la expresión

$$k_{\alpha} = k_{0\alpha} - \frac{D_{\alpha}}{\exp\left(\frac{T_{0\alpha}}{T}\right) - 1} ,$$

donde T es la temperatura medida en Kelvin y $k_{0\alpha}$, D_{α} y $T_{0\alpha}$ son parámetros que dependen de cada muelle (su material y geometría) [$\alpha = a, b, c$ identifica a cada muelle].

Las ecuaciones que describen el tamaño de los muelles en equilibrio son

$$\begin{aligned} k_a d_a &= k_b d_b + g m_1 \\ k_b d_b &= k_c d_c + g m_2 \\ l_a + d_a + l_b + d_b + d_c + l_c &= L \end{aligned}$$

donde g es la aceleración de la gravedad, L es la distancia que hay entre los dos soportes y l_{α} son las longitudes de los muelles cuando no están sometidos a ninguna fuerza y d_{α} es la deformación que sufren los muelles.

2.A. Crear una función de nombre "equilibrium_3_springs.m" que calcule las deformaciones $d = \{d_{\alpha}\}$ de los 3 muelles a partir de los parámetros $k_0 = \{k_{0\alpha}\}$, $D = \{D_{\alpha}\}$, $T_0 = \{T_{0\alpha}\}$ y $l = \{l_{\alpha}\}$, las masas $m = \{m_1, m_2\}$, la separación entre soportes L y la temperatura T . **(1.25 puntos)**

La función deberá:

- Obtener las ecuaciones de equilibrio en forma matricial $A \cdot d = b$, con $d = \{d_a; d_b; d_c\}$, calculando la matriz A y el vector b teniendo en cuenta los argumentos de entrada que se suministran a la función.
- Resolverlas para obtener las deformaciones d_{α} de los muelles y devolver d .
- La función tendrá la siguiente cabecera donde se especifica los argumentos de entrada y salida de la misma y sus unidades:

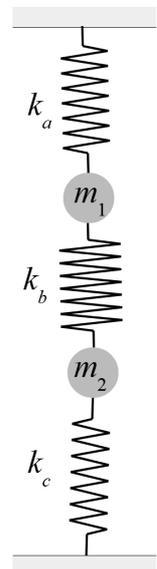


Figura 2

```

function d = equilibrium_3_springs(k0, D, T0, l, m, L, T);
% Equilibrium deformation of 3 springs connected with 2 masses
% under the gravitational force, as shown in figure 2, at a given
% temperature T
% Input:
%   k0(3) : T=0 spring elastic constant matrix (N/m)
%   D(3)  : elastic constant parameter matrix (N/m)
%   T0(2) : spring Temperature parameter matrix (K)
%   l(3)  : spring equilibrium lengths matrix (m)
%   m(2)  : hanging masses (kg)
%   L     : Supports distance (m)
%   T     : Temperature (K)
% Output:
%   d(3)  : spring deformations (m)

```

En un script de nombre "Control3_2.m":

2.B. Calcular la deformación de cada muelle en el rango de temperatura de [0,1000] K. Representar en un mismo gráfico la *longitud total* de cada muelle en función de la temperatura. **(1.00 puntos)**

2.C. Calcular numéricamente a qué temperatura la longitud de los muelles *a* y *b* es idéntica (con una precisión de 10^{-6} m), señalarlo mediante una línea vertical en el gráfico anterior y sacar el valor de la temperatura por la ventana de comandos mostrando la información claramente. **(1.25 puntos)**

Datos:

α	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
l_α (m)	0.175	0.180	0.185
$k_{0\alpha}$ (N/m)	290	250	275
D_α (N/m)	20	16	100
$T_{0\alpha}$ (K)	100	200	350

<i>i</i>	1	2
m_i (kg)	0.10	0.15

L=0.65 m

g=9.8 m/s

Ejercicio 3. Consideremos un conjunto de 21 celdas dispuestas a lo largo de un segmento horizontal, e indexadas desde 1 a 21 empezando por la izquierda. La separación entre dos celdas sucesivas es 1 cm. Una partícula parte de la primera celda y se mueve en intervalos de tiempo discretos tratando de saltar de la celda en la que se encuentra a otra elegida al azar (incluyendo a la que está): los 21 posibles destinos son *a priori* equiprobables. La probabilidad de que ese salto sea aceptado es $p_s(d) = \frac{d+10}{5d+10}$, donde $d \geq 0$ es la distancia en cm que separa la celda inicial de la final. Es decir, en cada intento de salto se escoge una celda destino de manera equiprobable, y el salto será aceptado si $q \leq p_s(d)$, donde q es un número aleatorio entre 0 y 1.

Realice un script de nombre "Control3_3.m" que:

3.A. Obtenga los índices de las celdas que va ocupando la partícula a lo largo de 10^5 intentos de salto. (NO representarlos en un gráfico, ni mostrarlos en pantalla.) **(1.25 puntos)**

3.B. A partir de los datos obtenidos en el apartado 3.A, calcule y muestre en la ventana de comandos de forma suficientemente clara la probabilidad de encontrar a la partícula en: **i)** la celda central; **ii)** en cualquiera de los dos extremos; **iii)** en una celda de índice impar. **(0.75 puntos)**

3.C. A partir de los datos obtenidos en el apartado 3.A, calcule y represente mediante un histograma la probabilidad $p(z)$ de que dos posiciones consecutivas (ocupadas en instantes consecutivos) estén a una distancia z . Tenga en cuenta que los valores que puede tomar z son discretos. **(1.00 puntos)**