Grado de Física. Computación I. Curso 2018-19

Control 3 (10-05-2019; 9:30 a 13:30). Modelo A

Instrucciones:

Envía las soluciones de este examen al correo electrónico de tu profesor en la asignatura utilizando tu correo institucional de la UAM (*nombre@estudiante.uam.es*).

El 'asunto' del correo será: 'Computación I, Control 3: Subgrupo GGGG'. (GGGG es tu subgrupo.)

Comprueba que envías en el correo electrónico todas las soluciones del control y todos los programas necesarios para poder ejecutarlos.

Una vez enviado el correo, informa a tu profesor y espera a que este compruebe que lo ha recibido correctamente antes de abandonar el aula.

Las calificaciones de cada subgrupo serán publicadas en su página web de la asignatura.

Recuerda que todos los gráficos deben mostrar e identificar claramente en los ejes las magnitudes que representan y las unidades utilizadas.

El control se valorará sobre 10 puntos. La nota obtenida será el 30% de la asignatura.

Ejercicio 1. Tenemos una caja con 100 bolas, la mitad blancas y la mitad negras. Se extraen de forma consecutiva 10 bolas al azar. La probabilidad de obtener una bola negra en una extracción es de $p_n = n/N$ donde *N* es el número de bolas totales que quedan dentro de la caja y *n* el número de bolas negras que queden en ese momento (*N*=100, 99, ..., 91 en las sucesivas extracciones; *n*=50 en la primera extracción, pero después dependerá del número de bolas negras que queden dentro).

En este ejercicio queremos calcular mediante la realización de un experimento numérico la probabilidad $p_f(b)$ de obtener *b*=0, 1, ..., 10 bolas negras tras las 10 extracciones.

Para ello realizar un script de nombre "`Control3_1.m`" que:

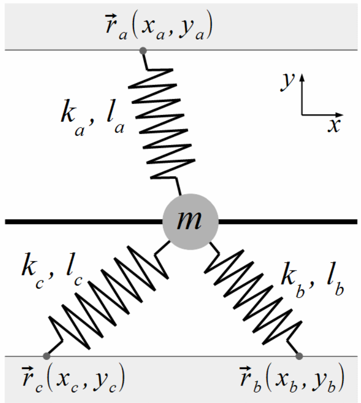
1.A. Realice el experimento de extracción de las 10 bolas 10^5 veces y obtenga y guarde en memoria en una matriz el color de la bola en cada extracción (las bolas negras podrían representarse mediante '1' y las blancas mediante '0', por ejemplo). (NO representar los resultados de los experimentos en un gráfico, ni mostrarlos en pantalla.) **(1.75 puntos)**

1.B. A partir de los datos obtenidos en el apartado 1.A, calcule, almacene y represente mediante un histograma la probabilidad $p_f(b)$ de obtener *b* bolas negras en total en las 10 extracciones. **(1.00 puntos)**

1.C. A partir de los datos obtenidos en el apartado 1.A, calcule y muestre en la ventana de comandos de forma suficientemente clara la probabilidad que se ha tenido durante el experimento de que: **i)** la bola de la séptima extracción fuese una bola blanca; **ii)** en dos extracciones sucesivas las dos bolas fuesen negras. **(0.50 puntos)**

Para los Ejercicios 2 y 3 se va a utilizar el problema representado esquemáticamente en la *Figura*, donde no se tendrán en cuenta los efectos de la gravedad.

La masa m, que consideraremos puntual, está atrapada en un raíl de tal manera que sólo puede moverse a lo largo de la dirección x (el raíl esta situado en la posición y=0); carril y masa tienen un coeficiente de fricción μ. Como se muestra en la *Figura*, la masa se encuentra unida a tres muelles cuyos otros extremos están fijos en las posiciones que se indican.



Figura

Si la masa m se encuentra en la posición $\vec{r}$ la fuerza que ejerce sobre ella el muelle $i=a,b,c$, con un extremo fijo en la posición $\vec{r}_i$, es

$$\vec{F}_i = -k_i\left(1-\frac{l_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}\right)(\vec{r}-\vec{r}_i),$$

donde k_i es la constante elástica del muelle y l_i es la longitud en reposo del muelle.

La fuerza elástica total sobre la masa es $\vec{F}_{el} = \sum_{i=a,b,c} \vec{F}_i$.

Por tanto, el movimiento de la masa m a lo largo del carril resulta de la acción de una fuerza $F_r = F_{el;x}$, que llamaremos de recuperación, y de una fuerza de fricción F_f.

Si la partícula tiene una velocidad no nula ($v \neq 0$),

$$F_f = -\,sign(v)\,\mu\,|F_{el;y}|\;;$$

esto es, la fricción se opone al movimiento.

Por otro lado, si $v=0$ la fricción impedirá que la partícula arranque desde el reposo si $\mu|F_{el;y}| \geq |F_r|$ (nótese que estamos suponiendo que los coeficientes de fricción estático y dinámico son iguales).

La energía potencial elástica asociada a la deformación de cada muelle es

$$E_{p,i} = \frac{1}{2}k_i\left(|\vec{r}-\vec{r}_i|-l_i\right)^2,$$

siendo la energía potencial elástica total del sistema

$$E_p = \sum_{i=a,b,c} E_{p,i}.$$

La energía cinética de la masa será

$$E_c = \frac{1}{2}m\,v^2,$$

y la energía mecánica total del sistema será

$$E_T = E_c + E_p.$$

Finalmente, el trabajo W_f realizado por la fuerza de fricción F_f es

$$W_f = \int_{t=0}^{t} F_f\, v\, dt.$$

<u>Datos del problema</u>:

	constante elástica k_i (N/m)	longitud en reposo l_i (m)	posición extremo $\vec{r}_i$ (m)
Muelle *a*	4.5	1.2	$(0.0, 0.8)$
Muelle *b*	1.5	0.8	$(0.6, -0.5)$
Muelle *c*	2.3	0.6	$(-0.3, -0.5)$

Masa: m = 5 g. Coeficiente de fricción: $\mu = 0.025$.

Ejercicio 2.

2.A. Crear una función de nombre "`Force_Potential_3_springs.m`" que calcule la fuerza elástica vectorial $\vec{F}_{el}$ sobre la masa y la energía potencial elástica del sistema E_p para un conjunto de posiciones horizontales $\{x\}$ de la masa en el riel a partir de las posiciones fijas de los muelles $r_m = \{\vec{r}_i\}$, constantes de muelles $k_m = \{k_i\}$ y longitudes de reposo $l_m = \{l_i\}$. (**1.50 puntos**)

La función tendrá la siguiente cabecera donde se especifican los argumentos de entrada y salida de la misma, sus dimensiones y sus unidades:

```
function [Fel, Ep] = Force_Potential_3_springs(x, rm, km, lm);
  % Force on a mass due to 3 springs, and system potential energy
  %  [Fel, Ep] = Force_Potential_3_springs(x, rm, km, lm);
  %   Input:
  %      x(1,np)    : mass 'x' coordinate (m);  'np' number of positions
  %      rm(2,3)    : spring fixed positions (m)
  %      km(1,3)    : spring constants (N/m)
  %      lm(1,3)    : spring equilibrium lengths (m)
  %   Output:
  %      Fel(2,np) : total elastic force on mass (N)
  %      Ep(1,np)  : total potential energy (J)
```

En lo que queda de Ejercicio 2 y en el Ejercicio 3 sugerimos utilizar la función creada en el apartado 2.A, pero no es obligatorio su uso.

En un script de nombre "`Control3_2.m`":

2.B. Calcular y dibujar la fuerzas de recuperación F_r , el módulo de la fuerza de fricción dinámica $|F_f|$ y la energía potencial E_p en el rango de posiciones para la masa de $x \in [-1.0, 1.0]$ m. Ambas fuerzas deben estar representadas en la misma figura (y deben ser claramente identificadas) y la energía en otra diferente. (**0.75 puntos**)

2.C. Calcular numéricamente el punto de equilibrio inestable de F_r (corresponde al punto donde $F_r = 0$ y E_p es máxima) con precisión en la fuerza de 10^{-9} N. Mostrar en pantalla dicha posición de equilibrio y resaltar con un símbolo de rojo dicha posición en la gráfica de E_p , comprobando así visualmente que corresponde con el máximo de la energía potencial. (**1.25 puntos**)

Ejercicio 3.

Sabiendo que la masa *m* en $t = 0$ s está en la posición $x = 0$ m y se mueve hacia la derecha con una energía mecánica total (cinética más potencial elástica) $E_T(t=0) = 0.6$ J, crear un script de nombre "`Control3_3.m`" que:

3.A. Integre la ecuación del movimiento de la masa durante 2 segundos o hasta que la masa se pare (lo que ocurra antes) usando un paso de tiempo de $dt = 5 \cdot 10^{-4}$ s. El paso de tiempo indicado es suficientemente pequeño para analizar con precisión la actuación de la fricción estática. La fricción impedirá el movimiento en un instante t_s cuando v cambie de signo en los puntos de retorno si el valor absoluto de la fuerza de fricción es mayor o igual que el valor absoluto de la fuerza recuperadora. Es decir, la partícula se parará ($v = 0,\ a = 0$) si se cumple simultáneamente: I) la velocidad ha cambiado de signo en t_s ; II) $|F_f(t = t_s)| \geq |F_r(t = t_s)|$. (**1.75 puntos**)

3.B. Dibuje en dos figuras distintas la velocidad y la posición de la masa en función del tiempo. (**0.5 puntos**)

3.C. Calcule y almacene el trabajo W_f realizado por la fuerza de fricción F_f durante el intervalo temporal $[0, t]$. Represente frente a t en una misma figura la energía mecánica total $E_T(t)$, el trabajo $W_f(t)$, y la diferencia $E_T(t) - W_f(t)$. Compruebe por inspección directa que dicha diferencia es constante e igual a la energía mecánica total en el instante inicial $E_T(t=0)$. (**1.00 puntos**)

Consideraciones sobre la realización de los ejercicios

Ejercicio 1

Si no eres capaz de resolver el apartado 1.A pero quieres intentar los apartados 1.B y/o 1.C, genera en el script una matriz aleatoria de 0 y 1 (que representarán las bolas blancas y negras respectivamente) con un tamaño 10×10^5, y utiliza esa matriz para realizar lo que se pide en los apartados 1.B. y 1.C.

Ejercicio 2 y 3

Si no eres capaz de calcular las fuerzas y la energía potencial para el problema propuesto con los tres muelles, o no eres capaz de obtener la función que se pide en 2.A, puedes intentar resolver los apartados 2.B, 2.C, 3.A, 3.B y 3.C **considerando la acción unicamente del muelle *a***.

Sin embargo, ya que el problema de un solo muelle entraña mucha menos dificultad:

a) No se puntuará el ejercicio 2.A.;

b) La nota global de los Ejercicios 2 y 3 tendrá una **penalización de -1.00 puntos** sobre la obtenida.

Si eliges este caso donde solo actúa el muelle *a* la fuerza elástica que actúa sobre la masa es

$$\vec{F}_{el} = -k_a \left(1 - \frac{l_a}{\sqrt{(x-x_a)^2 + y_a^2}}\right)\left((x-x_a)\vec{\mathrm{i}} - y_a\,\vec{\mathrm{j}}\right).$$

La fuerza de rozamiento sigue siendo,

$$F_f = -\,sign(v)\,\mu\,|F_{el\,;y}|\ ;$$

si la partícula tiene una velocidad no nula ($v \neq 0$); y si $v = 0$, la fricción impedirá que la partícula arranque desde el reposo si $\mu\,|F_{el\,;y}| \geq |F_r|$.

La energía potencial del sistema cuando interviene únicamente el muelle *a* es

$$E_p = \frac{1}{2}\,k_a\left(\sqrt{(x-x_a)^2 + y_a^2} - l_a\right)^2.$$

Ejercicio 3

Si vas a usar un método de integración en el apartado 3.A que tiene menos precisión en la integración que alguno de los métodos tipo Verlet, vas a necesitar un paso de tiempo dt menor que el propuesto en el enunciado. En ese caso utiliza un paso $dt = 1 \cdot 10^{-5}$ s, y asegurate de verificar en el apartado 3.C que $E_T(t) - W_f(t)$ es constante para todo el tiempo de integración e igual a la energía inicial del sistema.