Grado de Física. Computación I. Curso 2020-21

Control I (30-10-2020; 10:30 a 13:30). Modelo **A**

Instrucciones:

- Envía las soluciones de este examen al correo electrónico de tu profesor en la asignatura utilizando tu correo institucional de la UAM (*nombre@estudiante.uam.es*). Comprueba que envías <u>todas</u> tus soluciones del control y <u>todos</u> los programas y funciones de script necesarios para poder ejecutarlos. El 'asunto' del correo será: 'Computación I, Control 1: Subgrupo GGGG' (GGGG es tu subgrupo). Una vez enviado el correo, informa a tu profesor y espera a que este compruebe que lo ha recibido correctamente antes de abandonar el aula.
- Las calificaciones de cada subgrupo serán publicadas en su página web o en moodle.
- La puntuación de cada apartado no es necesariamente proporcional a su longitud o dificultad.
- Recuerda incluir las unidades físicas, etiquetar claramente todos los gráficos, identificar las magnitudes que se presentan en pantalla, ...
- El control se valorará sobre 10 puntos. La nota obtenida será el 10% de la asignatura.

Ejercicio 1. En un ecosistema conviven dos especies, una de "presas" y otra de "cazadores". Un modelo simple que describe su dinámica se expresa matemáticamente como

$$\vec{q}_{n+1} = (\mathbb{I} + h\mathbb{A})\,\vec{q}_n + h\,(\mathbb{B}\vec{q}_n) \odot \vec{q}_n\ ,\ \text{con } \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}\ ,\ \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\vec{q}_n = [x_n; y_n]$ es un vector columna con el número de presas x_n y de cazadores y_n en el instante t_n, h es el paso de tiempo (esto es, $h = t_{n+1} - t_n$ para todo n), y los parámetros reales positivos a, b, c, d describen la interacción entre las dos especies. El símbolo $\odot$ es el producto matricial elemento a elemento (*producto Hadamard*). Por tanto, conocidas las poblaciones x_1 e y_1 en el instante inicial $t_1 = 0$, es posible calcular la evolución posterior del sistema.

Escriba un script de nombre `Control1_1.m` que:

1.A. Calcule y almacene las poblaciones x_n e y_n hasta el instante t_N, con $N = 4\cdot 10^4 + 1$ y $h = 5\cdot 10^{-4}$ años (esto es, hasta $t_N = 20$ años). Dibuje en una misma figura las poblaciones x_n e y_n frente a t_n. Compruebe visualmente que la evolución ¡es periódica!. **(2.5 pts.)**

1.B. Calcule y presente en pantalla: **i)** el tiempo durante el que la población de presas es menor que su población inicial; **ii)** el tiempo durante el que la población de presas es menor que la inical o mayor que el doble de la inicial; **iii)** el primer instante de tiempo en el que *ambas* poblaciones son menores que sus poblaciones de partida. (**1.5 pts.**)

1.C. Definimos las tasa de variación de los cazadores como $\mu_n = (y_{n+1} - y_n)/(hy_n)$. Represente en una segunda figura la población de cazadores y_n frente a t_n, con $n = 1, 2, ..., N-1$, usando puntos de manera que sean rojos si $\mu_n > 0.01$ años^{-1}, verdes si $\mu_n < -0.01$ años^{-1}, y azules si $\mu_n \in [-0.01, +0.01]$ años^{-1}. No es necesario incluir una leyenda en esta figura. **(1.0 pts.)**

Datos: $x_1 = 700$ presas, $y_1 = 80$ cazadores, $a = 3$, $b = 4\cdot 10^{-2}$, $c = 0.5$, $d = 10^{-3}$.

Ejercicio 2. La ecuación paramétrica de una curva *rhodonea* en coordenadas cartesianas es

$$x(u) = b\cos(ku)\cos(u) \ ; \ y(u) = b\cos(ku)\sin(u)$$

donde b es una constante positiva que define el tamaño de la curva y k es un número natural no nulo (orden de la curva) que determina su forma. En concreto, la curva rhodonea es cerrada y tiene forma de flor con n_p pétalos, donde $n_\mathrm{p} = 2k$ si k es par, y $n_\mathrm{p} = k$ si k es impar. Además, la curva se completa variando u entre 0 y u_max, con $u_\mathrm{max} = 2\pi$ si k es par y $u_\mathrm{max} = \pi$ si k es impar. Por tanto, la longitud de la curva rhodonea es

$$L = \int_0^{u_\mathrm{max}} |d\vec{r}(u)| = \int_0^{u_\mathrm{max}} \left|\frac{d\vec{r}(u)}{du}\right| du = \int_0^{u_\mathrm{max}} \sqrt{\left(\frac{dx(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy(u)}{du}\right)^2} du$$

2.A. Escriba una función de script de nombre `rhodonea.m` que calcule: **i)** los N puntos $\vec{r}_n$ de una curva rhodonea de tamaño b y orden k correspondientes a los valores equiespaciados $\mathtt{u} = [u_1, u_2, ..., u_N]$ del parámetro u, con $u_1 = 0$ y $u_N = u_\mathrm{max}$; **ii)** el número de pétalos n_p de la curva; **iii)** su longitud. En particular, los valores de $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N$ se devolverán en una matriz `R` de tamaño $2 \times N$ (la columna n-ésima contendrá las coordenadas cartesianas del punto $\vec{r}_n = [x(u_n); y(u_n)]$). El encabezado de tal función será:

```
function [R,np,len]=rhodonea(k,b,N)
% rhodonea - Rhodonea curve of k-th order
%     Use :  [R,np,len]=rhodonea(k,b,N)
% k(1,1)   : Order of the curve(integer) [input]
% b(1,1)   : Size of the rhodonea        [input]
% N        : Number of points            [input]
% R(2,N)   : Points of the rhodonea curve     [output]
% np       : Number of petals of the rhodonea [output]
% len      : Length of the rhodonea           [output]
```

La función de script no mostrará en pantalla ningún cálculo intermedio. (**1.5 pts.**)

Escriba un script de nombre `Control1_2.m` que, usando si lo desea la función `rhodonea.m`:

2.B. Calcule, almacene, y represente en una misma figura dos curvas rhodoneas, A y B, de tamaño b y órdenes $k_\mathrm{A} = 3$ y $k_\mathrm{B} = 6$ (use, en ambos casos, $N = 10^3$ puntos). Incluya en la leyenda identificativa de cada curva el número de pétalos correspondientes. Muestre claramente identificadas en la ventana de comandos las longitudes de las curvas A y B. (**1.5 pts.**)

2.C. Consideremos ahora una una partícula cuya posición en función del tiempo es:

$$x(t) = b\cos(k_\mathrm{B}\omega t)\cos(\omega t) \ ; \ y(t) = b\cos(k_\mathrm{B}\omega t)\sin(\omega t) \ \text{ con } \ t \in [0, 2\pi/\omega] \ ,$$

por lo que describe una trayectoria igual a la curva rhodonea B del apartado anterior.
Tras discretizar adecuadamente la variable t, calcule y almacene la posición $\vec{r}$, la velocidad $\vec{v}$, y la aceleración $\vec{a}$ de la partícula en función del tiempo. Represente en una segunda figura las componentes cartesianas v_x, v_y y el módulo $|\vec{v}|$ de la velocidad frente al tiempo. **(1.25 pts)**

2.D. Calcule la aceleración normal $\vec{a}_\mathrm{nor} = \vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{v} \ / \ |\vec{v}|^2)\vec{v}$ de la partícula para $t \in [0, 2\pi/\omega]$. Represente en una última figura los módulos de $\vec{a}$ y de $\vec{a}_\mathrm{nor}$ frente a t usando una línea continua negra y una línea roja a trazos, respectivamente. **(0.75 pts)**

DATOS: $b = 0.5$ m, $\omega = \pi$ s^{-1}.

Grado de Física. Computación I. Curso 2020-21

Control I (30-10-2020; 10:30 a 13:30). Modelo **B**

Instrucciones:

- Envía las soluciones de este examen al correo electrónico de tu profesor en la asignatura utilizando tu correo institucional de la UAM (*nombre@estudiante.uam.es*). Comprueba que envías todas tus soluciones del control y todos los programas y funciones de script necesarios para poder ejecutarlos. El 'asunto' del correo será: 'Computación I, Control 1: Subgrupo GGGG' (GGGG es tu subgrupo). Una vez enviado el correo, informa a tu profesor y espera a que este compruebe que lo ha recibido correctamente antes de abandonar el aula.
- Las calificaciones de cada subgrupo serán publicadas en su página web o en moodle.
- La puntuación de cada apartado no es necesariamente proporcional a su longitud o dificultad.
- Recuerda incluir las unidades físicas, etiquetar claramente todos los gráficos, identificar las magnitudes que se presentan en pantalla, ...
- El control se valorará sobre 10 puntos. La nota obtenida será el 10% de la asignatura.

Ejercicio 1. En un ecosistema conviven dos especies, una de "presas" y otra de "cazadores". Un modelo simple que describe su dinámica se expresa matemáticamente como

$$\vec{q}_{n+1} = (\mathbb{I} + h\mathbb{A})\,\vec{q}_n + h\,(\mathbb{B}\vec{q}_n) \odot \vec{q}_n \ , \ \text{con } \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \ , \ \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\vec{q}_n = [x_n; y_n]$ es un vector columna con el número de presas x_n y de cazadores y_n en el instante t_n, h es el paso de tiempo (esto es, $h = t_{n+1} - t_n$ para todo n), y los parámetros reales positivos a, b, c, d describen la interacción entre las dos especies. El símbolo $\odot$ es el producto matricial elemento a elemento (*producto Hadamard*). Por tanto, conocidas las poblaciones x_1 e y_1 en el instante inicial $t_1 = 0$, es posible calcular la evolución posterior del sistema.

Escriba un script de nombre `Control1_1.m` que:

1.A. Calcule y almacene las poblaciones x_n e y_n hasta el instante t_N, con $N = 4\cdot10^4+1$ y $h = 5\cdot10^{-4}$ años (esto es, hasta $t_N = 20$ años). Dibuje en una misma figura las poblaciones x_n e y_n frente a t_n. Compruebe visualmente que la evolución ¡es periódica!. **(2.5 pts.)**

1.B. Calcule y presente en pantalla: **i)** el tiempo durante el que la población de presas es menor que su población inicial; **ii)** el tiempo durante el que la población de presas es menor que la inical o mayor que el doble de la inicial; **iii)** el primer instante de tiempo en el que *ambas* poblaciones son menores que sus poblaciones de partida. (**1.5 pts.)**

1.C. Definimos las tasa de variación de los cazadores como $\mu_n = (y_{n+1} - y_n)/(hy_n)$. Represente en una segunda figura la población de cazadores y_n frente a t_n, con $n = 1, 2, ..., N-1$, usando puntos de manera que sean rojos si $\mu_n > 0.01$ años^{-1}, verdes si $\mu_n < -0.01$ años^{-1}, y azules si $\mu_n \in [-0.01, +0.01]$ años^{-1}. No es necesario incluir una leyenda en esta figura. **(1.0 pts.)**

Datos: $x_1 = 2666$ presas, $y_1 = 333$ cazadores, $a = 1$, $b = 10^{-2}$, $c = 0.8$, $d = 4\cdot10^{-4}$.

Ejercicio 2. La ecuación paramétrica de una curva *rhodonea* en coordenadas cartesianas es

$$x(u) = b\cos(ku)\cos(u)\ ;\ y(u) = b\cos(ku)\sin(u)$$

donde b es una constante positiva que define el tamaño de la curva y k es un número natural no nulo (orden de la curva) que determina su forma. En concreto, la curva rhodonea es cerrada y tiene forma de flor con n_p pétalos, donde $n_\mathrm{p} = 2k$ si k es par, y $n_\mathrm{p} = k$ si k es impar. Además, la curva se completa variando u entre 0 y u_max, con $u_\mathrm{max} = 2\pi$ si k es par y $u_\mathrm{max} = \pi$ si k es impar. Por tanto, la longitud de la curva rhodonea es

$$L = \int_0^{u_\mathrm{max}} |d\vec{r}(u)| = \int_0^{u_\mathrm{max}} \left|\frac{d\vec{r}(u)}{du}\right| du = \int_0^{u_\mathrm{max}} \sqrt{\left(\frac{dx(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy(u)}{du}\right)^2} du$$

2.A. Escriba una función de script de nombre `rhodonea.m` que calcule: **i)** los N puntos $\vec{r}_n$ de una curva rhodonea de tamaño b y orden k correspondientes a los valores equiespaciados `u` $= [u_1, u_2, ..., u_N]$ del parámetro u, con $u_1 = 0$ y $u_N = u_\mathrm{max}$; **ii)** el número de pétalos n_p de la curva; **iii)** su longitud. En particular, los valores de $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N$ se devolverán en una matriz `R` de tamaño $2 \times N$ (la columna n-ésima contendrá las coordenadas cartesianas del punto $\vec{r}_n = [x(u_n); y(u_n)]$). El encabezado de tal función será:

```
function [R,np,len]=rhodonea(k,b,N)
% rhodonea - Rhodonea curve of k-th order
%     Use :   [R,np,len]=rhodonea(k,b,N)
% k(1,1)   : Order of the curve(integer) [input]
% b(1,1)   : Size of the rhodonea        [input]
% N        : Number of points            [input]
% R(2,N)   : Points of the rhodonea curve     [output]
% np       : Number of petals of the rhodonea [output]
% len      : Length of the rhodonea           [output]
```

La función de script no mostrará en pantalla ningún cálculo intermedio. (**1.5 pts.**)

Escriba un script de nombre `Control1_2.m` que, usando si lo desea la función `rhodonea.m`:

2.B. Calcule, almacene, y represente en una misma figura dos curvas rhodoneas, A y B, de tamaño b y órdenes $k_\mathrm{A} = 3$ y $k_\mathrm{B} = 6$ (use, en ambos casos, $N = 10^3$ puntos). Incluya en la leyenda identificativa de cada curva el número de pétalos correspondientes. Muestre claramente identificadas en la ventana de comandos las longitudes de las curvas A y B. (**1.5 pts.**)

2.C. Consideremos ahora una una partícula cuya posición en función del tiempo es:

$$x(t) = b\cos(k_\mathrm{B}\omega t)\cos(\omega t)\ ;\ y(t) = b\cos(k_\mathrm{B}\omega t)\sin(\omega t) \ \text{ con } \ t \in [0, 2\pi/\omega]\ ,$$

por lo que describe una trayectoria igual a la curva rhodonea B del apartado anterior.
Tras discretizar adecuadamente la variable t, calcule y almacene la posición $\vec{r}$, la velocidad $\vec{v}$, y la aceleración $\vec{a}$ de la partícula en función del tiempo. Represente en una segunda figura las componentes cartesianas v_x, v_y y el módulo $|\vec{v}|$ de la velocidad frente al tiempo. **(1.25 pts)**

2.D. Calcule la aceleración normal $\vec{a}_\mathrm{nor} = \vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{v}\ /\ |\vec{v}|^2)\vec{v}$ de la partícula para $t \in [0, 2\pi/\omega]$. Represente en una última figura los módulos de $\vec{a}$ y de $\vec{a}_\mathrm{nor}$ frente a t usando una línea continua negra y una línea roja a trazos, respectivamente. **(0.75 pts)**

DATOS: $b = 0.8$ m, $\omega = 2\pi$ s^{-1}.

Grado de Física. Computación I. Curso 2020-21

Control I (30-10-2020; 10:30 a 13:30). Modelo **C**

Instrucciones:

- Envía las soluciones de este examen al correo electrónico de tu profesor en la asignatura utilizando tu correo institucional de la UAM (*nombre@estudiante.uam.es*). Comprueba que envías todas tus soluciones del control y todos los programas y funciones de script necesarios para poder ejecutarlos. El 'asunto' del correo será: 'Computación I, Control 1: Subgrupo GGGG' (GGGG es tu subgrupo). Una vez enviado el correo, informa a tu profesor y espera a que este compruebe que lo ha recibido correctamente antes de abandonar el aula.
- Las calificaciones de cada subgrupo serán publicadas en su página web o en moodle.
- La puntuación de cada apartado no es necesariamente proporcional a su longitud o dificultad.
- Recuerda incluir las unidades físicas, etiquetar claramente todos los gráficos, identificar las magnitudes que se presentan en pantalla, ...
- El control se valorará sobre 10 puntos. La nota obtenida será el 10% de la asignatura.

Ejercicio 1. En un ecosistema conviven dos especies, una de "presas" y otra de "cazadores". Un modelo simple que describe su dinámica se expresa matemáticamente como

$$\vec{q}_{n+1} = (\mathbb{I} + h\mathbb{A})\,\vec{q}_n + h\,(\mathbb{B}\vec{q}_n) \odot \vec{q}_n \ , \ \text{con } \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \ , \ \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\vec{q}_n = [x_n; y_n]$ es un vector columna con el número de presas x_n y de cazadores y_n en el instante t_n, h es el paso de tiempo (esto es, $h = t_{n+1} - t_n$ para todo n), y los parámetros reales positivos a, b, c, d describen la interacción entre las dos especies. El símbolo $\odot$ es el producto matricial elemento a elemento (*producto Hadamard*). Por tanto, conocidas las poblaciones x_1 e y_1 en el instante inicial $t_1 = 0$, es posible calcular la evolución posterior del sistema.

Escriba un script de nombre `Control1_1.m` que:

1.A. Calcule y almacene las poblaciones x_n e y_n hasta el instante t_N, con $N = 4\cdot 10^4 + 1$ y $h = 5\cdot 10^{-4}$ años (esto es, hasta $t_N = 20$ años). Dibuje en una misma figura las poblaciones x_n e y_n frente a t_n. Compruebe visualmente que la evolución ¡es periódica!. **(2.5 pts.)**

1.B. Calcule y presente en pantalla: **i)** el tiempo durante el que la población de presas es menor que su población inicial; **ii)** el tiempo durante el que la población de presas es menor que la inical o mayor que el doble de la inicial; **iii)** el primer instante de tiempo en el que *ambas* poblaciones son menores que sus poblaciones de partida. (**1.5 pts.)**

1.C. Definimos las tasa de variación de los cazadores como $\mu_n = (y_{n+1} - y_n)/(hy_n)$. Represente en una segunda figura la población de cazadores y_n frente a t_n, con $n = 1, 2, ..., N-1$, usando puntos de manera que sean rojos si $\mu_n > 0.01$ años^{-1}, verdes si $\mu_n < -0.01$ años^{-1}, y azules si $\mu_n \in [-0.01, +0.01]$ años^{-1}. No es necesario incluir una leyenda en esta figura. **(1.0 pts.)**

Datos: $x_1 = 1500$ presas, $y_1 = 250$ cazadores, $a = 1.5$, $b = 4\cdot 10^{-3}$, $c = 0.4$, $d = 3\cdot 10^{-4}$.

Ejercicio 2. La ecuación paramétrica de una curva *rhodonea* en coordenadas cartesianas es

$$x(u) = b\cos(ku)\cos(u)\ ;\ y(u) = b\cos(ku)\sin(u)$$

donde b es una constante positiva que define el tamaño de la curva y k es un número natural no nulo (orden de la curva) que determina su forma. En concreto, la curva rhodonea es cerrada y tiene forma de flor con n_p pétalos, donde $n_\mathrm{p} = 2k$ si k es par, y $n_\mathrm{p} = k$ si k es impar. Además, la curva se completa variando u entre 0 y u_max, con $u_\mathrm{max} = 2\pi$ si k es par y $u_\mathrm{max} = \pi$ si k es impar. Por tanto, la longitud de la curva rhodonea es

$$L = \int_0^{u_\mathrm{max}} |d\vec{r}(u)| = \int_0^{u_\mathrm{max}} \left|\frac{d\vec{r}(u)}{du}\right| du = \int_0^{u_\mathrm{max}} \sqrt{\left(\frac{dx(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy(u)}{du}\right)^2} du$$

2.A. Escriba una función de script de nombre `rhodonea.m` que calcule: **i)** los N puntos $\vec{r}_n$ de una curva rhodonea de tamaño b y orden k correspondientes a los valores equiespaciados $\mathtt{u} = [u_1, u_2, ..., u_N]$ del parámetro u, con $u_1 = 0$ y $u_N = u_\mathrm{max}$; **ii)** el número de pétalos n_p de la curva; **iii)** su longitud. En particular, los valores de $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N$ se devolverán en una matriz `R` de tamaño $2 \times N$ (la columna n-ésima contendrá las coordenadas cartesianas del punto $\vec{r}_n = [x(u_n); y(u_n)]$). El encabezado de tal función será:

```
function [R,np,len]=rhodonea(k,b,N)
% rhodonea - Rhodonea curve of k-th order
%     Use :  [R,np,len]=rhodonea(k,b,N)
% k(1,1)   : Order of the curve(integer) [input]
% b(1,1)   : Size of the rhodonea        [input]
% N        : Number of points            [input]
% R(2,N)   : Points of the rhodonea curve     [output]
% np       : Number of petals of the rhodonea [output]
% len      : Length of the rhodonea           [output]
```

La función de script no mostrará en pantalla ningún cálculo intermedio. (**1.5 pts.**)

Escriba un script de nombre `Control1_2.m` que, usando si lo desea la función `rhodonea.m`:

2.B. Calcule, almacene, y represente en una misma figura dos curvas rhodoneas, A y B, de tamaño b y órdenes $k_\mathrm{A} = 3$ y $k_\mathrm{B} = 6$ (use, en ambos casos, $N = 10^3$ puntos). Incluya en la leyenda identificativa de cada curva el número de pétalos correspondientes. Muestre claramente identificadas en la ventana de comandos las longitudes de las curvas A y B. (**1.5 pts.**)

2.C. Consideremos ahora una una partícula cuya posición en función del tiempo es:

$$x(t) = b\cos(k_\mathrm{B}\omega t)\cos(\omega t)\ ;\ y(t) = b\cos(k_\mathrm{B}\omega t)\sin(\omega t)\ \text{ con }\ t \in [0, 2\pi/\omega]\ ,$$

por lo que describe una trayectoria igual a la curva rhodonea B del apartado anterior.
Tras discretizar adecuadamente la variable t, calcule y almacene la posición $\vec{r}$, la velocidad $\vec{v}$, y la aceleración $\vec{a}$ de la partícula en función del tiempo. Represente en una segunda figura las componentes cartesianas v_x, v_y y el módulo $|\vec{v}|$ de la velocidad frente al tiempo. **(1.25 pts)**

2.D. Calcule la aceleración normal $\vec{a}_\mathrm{nor} = \vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{v}\ /\ |\vec{v}|^2)\vec{v}$ de la partícula para $t \in [0, 2\pi/\omega]$. Represente en una última figura los módulos de $\vec{a}$ y de $\vec{a}_\mathrm{nor}$ frente a t usando una línea continua negra y una línea roja a trazos, respectivamente. **(0.75 pts)**

DATOS: $b = 0.4$ m, $\omega = \pi/2$ s^{-1}.

Grado de Física. Computación I. Curso 2020-21

Control I (30-10-2020; 10:30 a 13:30). Modelo **D**

Instrucciones:

- Envía las soluciones de este examen al correo electrónico de tu profesor en la asignatura utilizando tu correo institucional de la UAM (*nombre@estudiante.uam.es*). Comprueba que envías todas tus soluciones del control y todos los programas y funciones de script necesarios para poder ejecutarlos. El 'asunto' del correo será: 'Computación I, Control 1: Subgrupo GGGG' (GGGG es tu subgrupo). Una vez enviado el correo, informa a tu profesor y espera a que este compruebe que lo ha recibido correctamente antes de abandonar el aula.
- Las calificaciones de cada subgrupo serán publicadas en su página web o en moodle.
- La puntuación de cada apartado no es necesariamente proporcional a su longitud o dificultad.
- Recuerda incluir las unidades físicas, etiquetar claramente todos los gráficos, identificar las magnitudes que se presentan en pantalla, ...
- El control se valorará sobre 10 puntos. La nota obtenida será el 10% de la asignatura.

Ejercicio 1. En un ecosistema conviven dos especies, una de "presas" y otra de "cazadores". Un modelo simple que describe su dinámica se expresa matemáticamente como

$$\vec{q}_{n+1} = (\mathbb{I} + h\mathbb{A})\,\vec{q}_n + h\,(\mathbb{B}\vec{q}_n) \odot \vec{q}_n\ ,\ \text{con } \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}\ ,\ \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\vec{q}_n = [x_n; y_n]$ es un vector columna con el número de presas x_n y de cazadores y_n en el instante t_n, h es el paso de tiempo (esto es, $h = t_{n+1} - t_n$ para todo n), y los parámetros reales positivos a, b, c, d describen la interacción entre las dos especies. El símbolo $\odot$ es el producto matricial elemento a elemento (*producto Hadamard*). Por tanto, conocidas las poblaciones x_1 e y_1 en el instante inicial $t_1 = 0$, es posible calcular la evolución posterior del sistema.

Escriba un script de nombre `Control1_1.m` que:

1.A. Calcule y almacene las poblaciones x_n e y_n hasta el instante t_N, con $N = 4 \cdot 10^4 + 1$ y $h = 5 \cdot 10^{-4}$ años (esto es, hasta $t_N = 20$ años). Dibuje en una misma figura las poblaciones x_n e y_n frente a t_n. Compruebe visualmente que la evolución ¡es periódica!. **(2.5 pts.)**

1.B. Calcule y presente en pantalla: **i)** el tiempo durante el que la población de presas es menor que su población inicial; **ii)** el tiempo durante el que la población de presas es menor que la inical o mayor que el doble de la inicial; **iii)** el primer instante de tiempo en el que *ambas* poblaciones son menores que sus poblaciones de partida. (**1.5 pts.)**

1.C. Definimos las tasa de variación de los cazadores como $\mu_n = (y_{n+1} - y_n)/(hy_n)$. Represente en una segunda figura la población de cazadores y_n frente a t_n, con $n = 1, 2, ..., N-1$, usando puntos de manera que sean rojos si $\mu_n > 0.01$ años^{-1}, verdes si $\mu_n < -0.01$ años^{-1}, y azules si $\mu_n \in [-0.01, +0.01]$ años^{-1}. No es necesario incluir una leyenda en esta figura. **(1.0 pts.)**

Datos: $x_1 = 2000$ presas, $y_1 = 500$ cazadores, $a = 4$, $b = 8 \cdot 10^{-3}$, $c = 0.7$, $d = 6 \cdot 10^{-4}$.

Ejercicio 2. La ecuación paramétrica de una curva *rhodonea* en coordenadas cartesianas es

$$x(u) = b\cos(ku)\cos(u)\ ;\ y(u) = b\cos(ku)\sin(u)$$

donde b es una constante positiva que define el tamaño de la curva y k es un número natural no nulo (orden de la curva) que determina su forma. En concreto, la curva rhodonea es cerrada y tiene forma de flor con n_p pétalos, donde $n_\mathrm{p} = 2k$ si k es par, y $n_\mathrm{p} = k$ si k es impar. Además, la curva se completa variando u entre 0 y u_max, con $u_\mathrm{max} = 2\pi$ si k es par y $u_\mathrm{max} = \pi$ si k es impar. Por tanto, la longitud de la curva rhodonea es

$$L = \int_0^{u_\mathrm{max}} |d\vec{r}(u)| = \int_0^{u_\mathrm{max}} \left|\frac{d\vec{r}(u)}{du}\right| du = \int_0^{u_\mathrm{max}} \sqrt{\left(\frac{dx(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy(u)}{du}\right)^2}\, du$$

2.A. Escriba una función de script de nombre `rhodonea.m` que calcule: **i)** los N puntos $\vec{r}_n$ de una curva rhodonea de tamaño b y orden k correspondientes a los valores equiespaciados $\mathtt{u} = [u_1, u_2, ..., u_N]$ del parámetro u, con $u_1 = 0$ y $u_N = u_\mathrm{max}$; **ii)** el número de pétalos n_p de la curva; **iii)** su longitud. En particular, los valores de $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N$ se devolverán en una matriz `R` de tamaño $2 \times N$ (la columna n-ésima contendrá las coordenadas cartesianas del punto $\vec{r}_n = [x(u_n); y(u_n)]$). El encabezado de tal función será:

```
function [R,np,len]=rhodonea(k,b,N)
% rhodonea - Rhodonea curve of k-th order
%     Use :  [R,np,len]=rhodonea(k,b,N)
% k(1,1)  : Order of the curve(integer) [input]
% b(1,1)  : Size of the rhodonea        [input]
% N       : Number of points            [input]
% R(2,N)  : Points of the rhodonea curve     [output]
% np      : Number of petals of the rhodonea [output]
% len     : Length of the rhodonea           [output]
```

La función de script no mostrará en pantalla ningún cálculo intermedio. (**1.5 pts.**)

Escriba un script de nombre `Control1_2.m` que, usando si lo desea la función `rhodonea.m`:

2.B. Calcule, almacene, y represente en una misma figura dos curvas rhodoneas, A y B, de tamaño b y órdenes $k_\mathrm{A} = 3$ y $k_\mathrm{B} = 6$ (use, en ambos casos, $N = 10^3$ puntos). Incluya en la leyenda identificativa de cada curva el número de pétalos correspondientes. Muestre claramente identificadas en la ventana de comandos las longitudes de las curvas A y B. (**1.5 pts.**)

2.C. Consideremos ahora una una partícula cuya posición en función del tiempo es:

$$x(t) = b\cos(k_\mathrm{B}\omega t)\cos(\omega t)\ ;\ y(t) = b\cos(k_\mathrm{B}\omega t)\sin(\omega t)\ \text{ con }\ t \in [0, 2\pi/\omega]\ ,$$

por lo que describe una trayectoria igual a la curva rhodonea B del apartado anterior.
Tras discretizar adecuadamente la variable t, calcule y almacene la posición $\vec{r}$, la velocidad $\vec{v}$, y la aceleración $\vec{a}$ de la partícula en función del tiempo. Represente en una segunda figura las componentes cartesianas v_x, v_y y el módulo $|\vec{v}|$ de la velocidad frente al tiempo. **(1.25 pts)**

2.D. Calcule la aceleración normal $\vec{a}_\mathrm{nor} = \vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{v}\ /\ |\vec{v}|^2)\vec{v}$ de la partícula para $t \in [0, 2\pi/\omega]$. Represente en una última figura los módulos de $\vec{a}$ y de $\vec{a}_\mathrm{nor}$ frente a t usando una línea continua negra y una línea roja a trazos, respectivamente. **(0.75 pts)**

DATOS: $b = 0.2$ m, $\omega = \pi/4$ s^{-1}.