Control 2. Computacion I

by Jose M. Soler

Universidad Autónoma de Madrid

14 de Febrero de 2022

1 Esferas cargadas

Los centros de tres esferas metálicas de radios $R_i = 8, 3$ y 5 cm estan situados en las posiciones $\mathbf{r}_1 = (20, 10, 0)$cm, $\mathbf{r}_2 = (-30, 15, 0)$cm y $\mathbf{r}_3 = (10, -25, 0)$cm. Se cargan con cargas Q_i hasta que sus potenciales son $V_i = 50, -60$ y -50 V. Sabiendo que los potenciales están relacionados con las cargas por $V_i = k\,Q_i/R_i + \sum_{j\neq i} k\,Q_j/r_{ij}$, siendo $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ y $k = 8.99\times10^9$ Nm^2/C^2 la constante de Coulomb, escribir un programa `chargedSpheres.m` que,

a) Calcule r_{ij} y plantee las tres ecuaciones anteriores como una ecuación matricial $A\,Q = V$, siendo A una matriz 3×3 y Q, V dos vectores columna (2 puntos).

b) Resuelva dichas ecuaciones y calcule y escriba las cargas (1 punto).

c) En una malla de puntos x, y del cuadrado $-50 \leqslant x, y \leqslant 50$ cm, en el plano $z = 0$, calcule el potencial

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= V_i && \text{si} \quad |\mathbf{r}-\mathbf{r}_i| \leqslant R_i \\ &= \sum_{j=1}^{3} \frac{k\,Q_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|} && \text{si} \quad |\mathbf{r}-\mathbf{r}_i| > R_i \qquad \forall i \end{aligned}$$

y lo dibuje usando `surf` y `contour` en dos figuras (2 puntos).

2 Cohete

El motor de un cohete quema por segundo una masa de combustible $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -200$ kg/s y lo lanza en forma de gas con una velocidad $v_g = 2.5$ km/s, ejerciendo una fuerza de empuje $F = \mathrm{d}P_g/\mathrm{d}t = |\mathrm{d}m/\mathrm{d}t|\,v_g$. Su ecuación de movimiento es

$$F - m\,g = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\,v)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

con $m = m_0 + (\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)\,t$, y de ella puede despejarse la aceleración como

$$a(t) = \frac{1}{m(t)}\left(F - m(t)\,g - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v(t)\right)$$

(fijarse en el signo menos de $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$). Sabiendo que la masa inicial del cohete, incluyendo el combustible, es de $m_0 = 4\times10^4$ kg, y que el combustible se agota al cabo de 3 min,

a) Escibir una función `rocketAcceleration.m` con la siguiente interfaz (2 puntos):

```
function a = rocketAcceleration(z,v,t)

% Find the acceleration of a rocket with initial mass m0=4e4kg,

% dm/dt=-200kg/s (for t<3min), and gas exhaust velocity vg=2.5km/s.
```

```
% Input:
%    z    : position (height) in m
%    v    : velocity (m/s)
%    t    : time since liftoff (s)
% Output:
%    a    : acceleration (m/s^2)
```

Debe tenerse en cuenta que, para $t > 3$ min, el motor estará ya apagado y la aceleración será sólo $a(t) = -g$.

b) En un programa `rocketTrajectory.m`, integrar la ecuación de Newton para hallar $z(t)$ hasta $t_{\max} = 5$ min, con $\Delta t = 1$ s. Para ello se puede llamar a la función `newtonRungeKutta` de clase (o a otra similar), con una función de 'fuerza' `@rocketAcceleration` y una 'masa' $m = 1$, de modo que `newtonRungeKutta` calcule la aceleración correcta como F/m (2 puntos).

c) Representar las funciones $z(t), v(t)$ y $a(t)$ en tres figuras, y escribir la máxima velocidad y aceleración alcanzadas (1 punto).