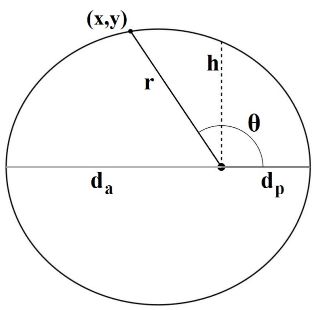
Grado de Física. Computación I. Curso 2023-24

Control 1 (03-11-2023; 10:30 a 13:30). Versión Z

Instrucciones:

- Envía las soluciones de este examen al correo electrónico de tu profesor en la asignatura utilizando tu correo institucional de la UAM (*nombre@estudiante.uam.es*). El 'asunto' del correo será: 'Computación I, Control 1: Subgrupo GGGG' (GGGG es tu subgrupo).
  Envía <u>todas</u> tus soluciones y <u>todos</u> los programas y subrutinas necesarios para poder ejecutarlos.
  Si no resuelves un ejercicio, envía un fichero en blanco con el nombre correspondiente.
  Una vez enviado el correo, informa a tu profesor y espera a que este compruebe que lo ha recibido correctamente antes de abandonar el aula.
- Las calificaciones de cada subgrupo serán publicadas en su página web o en Moodle.
- La puntuación de cada apartado *no* es necesariamente proporcional a su longitud o dificultad.
- Recuerda incluir las unidades físicas, etiquetar claramente todos los gráficos, identificar las magnitudes que se presentan en pantalla, ...

El control se valorará sobre 10 puntos. La nota obtenida será el 10% de la asignatura.



La trayectoria elíptica de un cuerpo que orbita gravitacionalmente con periodo T alrededor de otro (situado en el foco de la elipse) puede caracterizarse únicamente con dos parámetros: el *periastro* d_p o distancia mínima entre los dos cuerpos; y el *apoastro* d_a o distancia máxima. El resto de los parámetros de la órbita se deducen de ellos: el semieje mayor a, el semieje menor b, la semidistancia focal c, la excentricidad e, y el semi-latus rectum h:

$$a=\frac{d_p+d_a}{2}\ ,\ b=\sqrt{d_p d_a}\ ,\ c=\frac{d_a-d_p}{2}\ ,\ e=\frac{c}{a}=\frac{d_a-d_p}{d_p+d_a}\ ,\ h=\frac{2\,d_p d_a}{d_p+d_a}=\frac{b^2}{a}\ .$$

Con el origen de coordenadas en la posición del cuerpo orbitado, la posición del cuerpo que orbita $\vec{r}(\theta)=r(\theta)\left(\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}\right)$ puede determinarse mediante el ángulo θ respecto al eje mayor de la elipse (llamado anomalía verdadera) y la distancia entre ambos cuerpos $r(\theta)=\dfrac{h}{1+e\cos\theta}$.

Asumiendo que en $t=0$ el objeto está en $\theta=0$ (en el *periastro*), el instante t en el que el objeto que orbita se encuentra en la posición angular θ se puede determinar mediante la relación $t=\dfrac{T}{2\pi}\left(\xi-e\sin\xi\right)$ donde ξ es un parámetro (conocido como anomalía excéntrica) relacionado con θ mediante $\xi=2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}\tan\dfrac{\theta}{2}\right)+n\,2\pi$ donde n es un número entero que depende del valor de θ de tal manera que

$$n(\theta)=\begin{cases}0 & -\pi<\theta\le\pi\\ 1 & \pi<\theta\le 3\pi\\ 2 & 3\pi<\theta\le 5\pi\\ \vdots & \vdots\end{cases}\ .$$

La longitud s del arco de la elipse entre dos ángulos θ_i y θ_f y el área A barrida por el segmento r que une a los cuerpos se pueden calcular como $s=\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f}|d\vec{r}|=\int_{t_i}^{t_f}|\vec{v}|\,dt=\int_{\theta_i}^{\theta_f}\sqrt{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}\,d\theta$ y $A=\dfrac{1}{2}\int_{\theta_i}^{\theta_f}r^2\,d\theta$ respectivamente.

Ejercicio 1. Crear una función de script de nombre `ParametrosElipse` que devuelva a partir del *periastro* d_p y del *apoastro* d_a los parámetros de la órbita: semieje mayor a, semieje menor b, semidistancia focal c, excentricidad e y semi-latus rectum h. Ejemplo de uso:

```
[a,b,c,e,h] = ParametrosElipse (dp,da)
```

(1.00 pts.)

Ejercicio 2. Crear una función de script de nombre `OrbitaEliptica` que devuelva a partir del semi-latus rectum h, la excentricidad e, el periodo orbital T y de un vector de anomalías verdaderas θ, los vectores de las anomalías excéntricas ξ (`AE`), los tiempos t, la distancia r, así como la matriz R de coordenadas (las x en la primera fila, las y en la segunda) que se corresponden con dichas posiciones angulares. Recuerda para su construcción que n toma diferentes valores dependiendo de θ. Ejemplo de uso:

```
[AE,t,r,R] = OrbitaEliptica (h,e,T,theta)
```

(1.75 pts.)

Ejercicio 3. Crear un script de nombre `Control1_3.m` que realice las siguientes operaciones (puedes utilizar en los cálculos de este ejercicio, si quieres, las funciones de los ejercicios 1 y 2):

3.A. Dibujar los puntos de la trayectoria elíptica del objeto durante 2 vueltas usando un vector de mil elementos. En el gráfico los puntos de la trayectoria deben tener un color diferente según la distancia entre los cuerpos: rojo si $d_p \leq r < r_1$; amarillo si $r_1 \leq r < r_2$; verde si $r_2 \leq r < r_3$; y azul si $r_3 \leq r \leq d_a$; con $r_1 = d_p(1+e/2)$, $r_2 = d_p(1+e)$, $r_3 = d_p/(1-e)$. **(1.50 pts.)**

3.B. Calcular numéricamente y representar en un figura en función del tiempo t el área A barrida por el radio vector que une a los dos objetos para las 2 vueltas; representar el área barrida en unidades del área de la elipse, A/A_{elipse} ($A_{elipse}=\pi a b$). **(1.25 pts.)**

3.C. Calcular numéricamente en función del tiempo t la velocidad angular $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, la componente radial de la velocidad $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ y el módulo de la velocidad $|\vec{v}|$ para las dos vueltas. Representarlas frente al tiempo t: en una figura $\dot{\theta}$; en otra, $\dot{r}$ y $|\vec{v}|$, identificando claramente cada curva. **(1.75 pts.)**

3.D. Calcular la energía cinética y la energía potencial por unidad de masa m del objeto que orbita. Representarlas en una misma figura frente al tiempo, identificando claramente cada una. **(1.00 pts.)**

$$\text{Cinética, } \frac{E_c}{m} = \frac{1}{2}|\vec{v}|^2; \qquad \text{Potencial, } \frac{E_P}{m} = -GM\frac{1}{r};$$

3.E. Integrando numéricamente, determinar la longitud l del arco de la elipse que forma la trayectoria; es decir, la distancia recorrida durante un periodo T por el el objeto que orbita. También la longitud l del arco de una elipse se puede aproximar como $l_N = 2\pi\, a \sum_{i=1}^{N} K_i$ con $K_1=1$ y $K_i=K_{i-1}\frac{(2i-3)(2i-5)}{(2i-2)^2}e^2$ (para $i>1$). Calcular los valores l_N respecto a $N\in[1,11]$. Representar en una figura los valores l_N frente a $N\in[1,11]$ como símbolos y mostrar como una linea horizontal el valor de l calculado al integrar numéricamente la trayectoria. **(1.75 pts.)**

<u>Datos</u>: $T=1.0$ a , $d_p=0.5$ ua , $d_a=1.5$ ua , $GM=(2\pi)^2 a^3/T^2$. (a, año, $1\,\text{a} = 3.15576\cdot 10^7\,\text{s}$; ua, unidad astronómica, distancia media Tierra-Sol, $1\,\text{ua} = 1.495978707\cdot 10^{11}\,\text{m}$.)

Si quieres, todas los datos y gráficas pueden calcularse y representarse usando unidades astronómicas (ua) y años (a) como unidades de longitud y tiempo respectivamente.