Control 2. Computación I

Jose M. Soler
Universidad Autónoma de Madrid

12 de febrero de 2024

1. Tres esferas conductoras de radios $r_i = \{5, 10, 8\}$ cm, centradas en $x_i = \{0, 50, 100\}$ cm, se encuentran unidas por dos resistencias $R_{12} = 2\times10^6\ \Omega$ y $R_{23} = 5\times10^6\ \Omega$. El potencial eléctrico de cada esfera viene dado por $V_i = \sum_j U_{ij}q_j - E_0 x_i$, donde $U_{ii} = C/r_i$ y $U_{ij} = C/|x_i - x_j|, i \neq j$, siendo $C = 8{,}99\times10^9$ V m/C la constante de Coulomb y $E_0 = 50\times10^3$ V/m el campo eléctrico.

   - a) En un programa *spheres.m* escribir en forma matricial, como $\sum_j A_{ij}q_j = b_i$, las tres ecuaciones $V_1 = V_2$, $V_2 = V_3$, y $\sum_i q_i = 0$. Resolverlas para hallar las tres cargas q_i, ecribiéndolas en la línea de comandos con sus unidades (2 puntos).
   - b) En el instante $t = 0$, el campo eléctrico empieza a oscilar como $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$, con $\omega = 3 \times 10^4$ rad/s, provocando unas corrientes $I_{ij}(t) = (V_i(t) - V_j(t))/R_{ij}$, de modo que $dq_1(t)/dt = -I_{12}(t)$, $dq_2(t)/dt = I_{12}(t) - I_{23}(t)$, $dq_3(t)/dt = I_{23}(t)$. Escribir una función con la siguiente interfaz (2 puntos)

     ```
     function dqdt = chargeDerivative(t,q)
     % Time derivative of a system of three spheres in an electric field
     % Input:
     %   t           : time (s)
     %   q(3,1)      : charge q_i of the three spheres at time t (C)
     % Output:
     %   dqdt(3,1) : time derivative dq_i/dt of the three charges (A)
     ```

   - c) Llamando a la función *rungeKutta* de la unidad 5, integrar las ecuaciones para la dependencia temporal de las cargas hasta $t_{\text{máx}} = 0{,}5$ ms y representar $q_i(t)$. Elegir el intervalo de integración para que el resultado sea suficientemente preciso. Si no se ha sabido realizar el apartado (a), tomar $q_i(0) = 0$ y $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$ (1 punto).

2. En un cuadrado de 2×2 casillas, las numeramos de izquierda a derecha y de arriba abajo con un índice $i = 1, 2, 3, 4$. En la iteración $t = 1$ colocamos una ficha aleatoriamente en una de las tres primeras casillas. En iteraciones t sucesivas, movemos la ficha aleatoriamente a una de las casillas adyacente (izquierda, derecha, arriba o abajo) pero, si la ficha cae en la casilla 4, se queda en ella para siempre.

   - a) En un programa *jumps.m*, escribir una matriz S_{ij} con la probabilidad de salto entre las casillas i y j de modo que la probabilidad de que la ficha esté en la casilla j en $t + 1$ es $P_j(t + 1) = \sum_i P_i(t)S_{ij}$ (1 punto).

- b) Empezando en $t = 1$ e iterando hasta $t = 10$, calcular y representar como líneas las probabilidades $P_i(t)$, así como la suma de ellas (2 puntos).
- c) Realizar mil veces el experimento de colocar inicialmente la ficha y hacerla saltar nueve veces, contando en cuántas ocasiones la ficha está en cada casilla para cada iteración. Representar dichas frecuencias como símbolos, en la misma figura que la del apartado anterior (2 puntos).

Notas:

- Los programas deben estar documentados en inglés y no deben escribir nada que no se pida.
- Las figuras deben incluir etiquetas en cada eje.
- Enviar los ficheros *spheres.m*, *chargeDerivatives.m* y *jumps.m* a jose.soler@uam.es antes de terminar el examen.
- Para cada función y programa, se valorará:
    1. Que tenga la interfaz que se pide, y haga lo que se pide sin errores.
    2. Que esté bien documentado.
    3. Que esté programado de forma sencilla y fácil de entender.